线性代数　中国科学技术大学 2023 春
行列式

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

定义

1. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的矩阵. 我们称矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 A 的转置矩阵, 记为 A^T;

2. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的矩阵. 我们称矩阵

$$\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{a_{m1}} & \overline{a_{m2}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

为 A 的共轭矩阵, 记为 $\overline{A}$;

3. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的方阵. 我们称对角线元素之和为矩阵 A 的迹, 记为

$$\mathrm{tr}(A) := a_{11}+\cdots+a_{nn}.$$

转置, 共轭与迹的基本性质

引理 (转置和共轭的基本性质)

- $(A+B)^T = A^T + B^T$;
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
- $(AB)^T = B^T A^T$;
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.
- $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$;
- $\overline{\lambda A} = \overline{\lambda}\overline{A}$;
- $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$;
- $\overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1}$.

引理 (迹的基本性质)

- $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$;
- $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A)$;
- $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$, $\quad \mathrm{tr}(\overline{A}) = \overline{\mathrm{tr}(A)}$;
- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

定义

对于一个矩阵 A，我们将它的行和列分为几个部分后得到的由小矩阵 A_{ij} 组成的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} = (A_{ij})_{r\times s}$$

称为分块矩阵, 其中每个 A_{ij} 称为子块.

准对角矩阵, 准上三角矩阵, 准下三角矩阵.

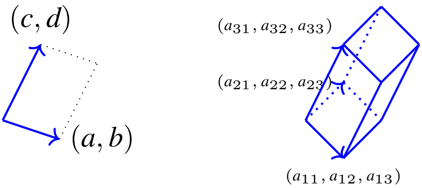
引理 (分块矩阵基本性质)

- $(A_{ij})_{r\times s}+(B_{ij})_{r\times s}=(A_{ij}+B_{ij})_{r\times s}$;
- $\lambda(A_{ij})_{r\times s}=(\lambda A_{ij})_{r\times s}$;
- $((A_{ij})_{r\times s})^T=(B_{ij})_{s\times r}$, 其中 $B_{ij}=A_{ji}^T$;
- $\overline{(A_{ij})_{r\times s}}=(\overline{A_{ij}})_{r\times s}$;
- 若 $A=(A_{ij})_{r\times r}$ 为方阵且行列拆分方式相同, 则
$$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{r}\mathrm{tr}(A_{ii});$$
- 若 $A_1,\cdots,A_r$ 均可逆, 则 $\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_r)$ 也可逆, 且逆矩阵为
$$\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_r)^{-1}=\mathrm{diag}(A_1^{-1},A_2^{-1},\cdots,A_r^{-1}).$$

定理

若 $A=(A_{ij})_{r\times s}$ 的列拆分方式与 $B=(B_{jk})_{s\times t}$ 的行拆分方式相同，则

$$AB=\left(\sum_{j=1}^{s}A_{ij}B_{jk}\right)_{r\times t}.$$



- 给定两个二维数组向量 (a,b) 和 (c,d). 如图我们有平行四边形. 这时平行四边形的 (有向) 面积为 $S=ad-bc$.
- 给定三个三维数组向量 (a_{11},a_{12},a_{13}),(a_{11},a_{12},a_{13}) 和 (a_{11},a_{12},a_{13}). 如图我们可构造一个平行六面体. 其 (有向) 体积正好为

$$\Delta=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

- 若给定 n 个 n 维数组向量呢?

行列式 (高维平行多面体的有向体积)

定义 (行列式)

方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式记为

$$\det(A) \quad 或 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

当 $n=1$ 时,

$$\det(A) := a_{11}.$$

当 $n\geq 2$ 时, $\det(A)$ 递归地定义为

$$\det(A) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

问题

用定义计算 n 阶行列式需要计算多少个乘法?

$$\frac{11!}{24 \times 60 \times 60} = 462.$$

子矩阵

定义

由矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行和第 $j_1,j_2,\cdots,j_s$ 列上的元素依次排列组成的 $r\times s$ 矩阵称为 A 的子矩阵, 记作

$$A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_r \\ j_1 j_2\cdots j_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_s} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \cdots & a_{i_rj_s}\end{pmatrix}$$

例

若 $A=\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44\end{pmatrix}$, 则 $A\binom{13}{13}=\begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 31 & 33\end{pmatrix}$;

$A\binom{412}{13}=\begin{pmatrix} 41 & 43 \\ 11 & 13 \\ 21 & 23\end{pmatrix}$;

定义

给定一个 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$.

1. 称 $M_{ij} := \det\left(A\begin{pmatrix}1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\\1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n\end{pmatrix}\right)$ 为元素 a_{ij} 的余子式.
2. 称 $A_{ij} := (-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.
3. 更一般地, 称 A 的某个 k 阶子矩阵的行列式为 A 的 k 阶子式, 删去子式所在的行列所得的矩阵的行列式称为该子式的余子式.
4. 特别地, 我们称 $\det\left(A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,k\\1,2,\cdots,k\end{pmatrix}\right)$ 为 A 的 k 阶主子式.

根据这个定义, 我们可以将行列式的定义式简写为

$$\boxed{\det(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{1j}M_{1j}.}$$

行列式例子

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

定理 (行列式行展开)

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵. 则对任意 $1\le i\le n$

$$\boxed{\det(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}.}$$

证明

记 $M\begin{bmatrix} i_1 i_2 \\ j_1 j_2 \end{bmatrix}$ 为矩阵 A 去掉第 i_1, i_2 行和 j_1, j_2 列后的行列式。即

$$M\begin{bmatrix} i_1 i_2 \\ j_1 j_2 \end{bmatrix} := \det\left(A\begin{pmatrix} 1,\cdots,i_1-1,i_1+1,\cdots,i_2-1,i_2+1,\cdots,n \\ 1,\cdots,j_1-1,j_1+1,\cdots,j_2-1,j_2+1,\cdots,n \end{pmatrix}\right).$$

对行列式的阶数 n 进行归纳。当 $n=1$, 结论显然成立。假设结论对 n-1 阶行列式成立。则

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{j_1=1}^{n}(-1)^{1+j_1}a_{1j_1}M_{1j_1} \\
&= \sum_{j_1=1}^{n}(-1)^{1+j_1}a_{1j_1}\left(\sum_{j_2=1}^{j_1-1}(-1)^{(i-1)+j_2}a_{ij_2}M\begin{bmatrix} 1,i \\ j_1,j_2 \end{bmatrix} + \sum_{j_2=j_1+1}^{n}(-1)^{(i-1)+(j_2-1)}a_{ij_2}M\begin{bmatrix} 1,i \\ j_1,j_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \sum_{j_2=1}^{n}(-1)^{i+j_2}a_{ij_2}\left(\sum_{j_1=j_2+1}^{n}(-1)^{1+(j_1-1)}a_{1j_1}M\begin{bmatrix} 1,i \\ j_1,j_2 \end{bmatrix} + \sum_{j_1=1}^{j_2-1}(-1)^{1+j_1}a_{1j_1}M\begin{bmatrix} 1,i \\ j_1,j_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \sum_{j_2=1}^{n}(-1)^{i+j_2}a_{ij_2}M_{ij_2} \\
&= \sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}
\end{aligned}$$

其中第二个等式为对 $n-1$ 阶行列式 M_{1j_1} 的第 $i-1$ 行进行展开，第三个等式为交换求和号，第四个等式为对 $n-1$ 阶行列式 M_{ij_2} 的第 1 行进行展开。

行列式例子

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \iddots & \\ \vdots & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{n1} a_{n-1,2} \cdots a_{1n}.$$

定理

方阵 A 的行列式具有下列性质:

1. 交换 A 某两行得 B, 则 $\det(B) = -\det(A)$.
2. 将 A 的某一行乘 λ 得 B, 则 $\det(B) = \lambda\det(A)$.
3. 若 A 的某一行是两个向量之和, 则 $\det(A)$ 可拆成两个行列式之和.

证明思路：将 $\det(A)$ 按第 p q 两行展开得

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{p+q+i+j-1}(a_{pi}a_{qj} - a_{pj}a_{qi})M\begin{bmatrix} p, q \\ i, j \end{bmatrix}.$$